Solution de l’exercice 4 :

Soit , un -échantillon d’une loi de densité et de fonction de répartition Soit , l’échantillon ordonné.

1. On détermine la loi du vecteur ,  :

La densité conjointe du vecteur , est donnée par

1. Soit  qu’on notera .

On considère le vecteur , :

)

D’après théorème de changement de variables, on a :

Par suite les sont indépendantes et

1. On montre que les variable aléatoires et , avec ,sont indépendantes :

D’après la question 2, la variable  s’écrit sous la forme

.

De même on a

et donc .

est une fonction de et est une fonction de  .

On remarque qu’il n’y a pas de termes en commun entre et . Comme les sont indépendants, alors on déduit que et sont des variables aléatoires indépendantes.

* **Montrons maintenant que a la même loi que dans un échantillon de loi**

La densité conjointe du couple est donnée par

On déduit du théorème de changement de variables la densité conjointe du couple :

Ce résultat montre que sont indépendantes et que la densité de est donnée pa

**.**

D’un autre côté, la densité de dans un échantillon de loi est

entrainent que  **a la même loi que dans un échantillon de loi .**